Тәжірибелік сабақ

Тақырып 9. Шексіз үлкен және шексіз аз шамалар. Шексіз аз шамалардың қасиеттері. Эквивалент функциялар. 1-ші, 2-ші тамаша шектер. Функция үзіліссіздігі. Үзіліс нүктелерінің түрлері.

1. Функцияның шегін эквиваленттік функциялар кестесін қолданып, табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{tg\pi x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$

Шешуі.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{tg\pi x}=\left(\dfrac{1-1}{0}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}x-3=t, t\to 0\\ x=t+3\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(t+3)-1}{tg(\pi t+3\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(t+3)-\ell og_3 3}{tg\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\dfrac{t+3}{3}}{\dfrac{tg\pi t}{\pi t}*\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\left(1+\dfrac{t}{3}\right)}{\pi t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t}\log_3\left(1+\frac{t}{3}\right)=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0}\log_3\left(1+\frac{t}{3}\right)^{\frac{3}{t}*\frac{1}{3}}=\frac{1}{\pi}\log_3 e^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3\pi\ln 3}$$

1-ші және 2-ші тамаша шектерден шығатын салдарлар:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1;\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

қолданылды.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{\arcsin^2 4x}{16x^2}\cdot 16x^2}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{16x^2}\right)^{2x+1}=$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{16}\right)^{2x+1}=\frac{1}{16}$$

1-ші тамаша шектерден шығатын салдар:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1$$

қолданылды.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$, $x\to 0$ ұмтылғанда $\sin 5x\approx 5x,\ \ln(1+x)\approx x$

2. Функцияның шектерін 1 тамаша шекті қолданып, табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+arctgx}{x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+2x)}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$

Шешуі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+arctgx}{x}$ шегі үшін $\lim\limits_{x\to 0}2x=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ болғандықтан, онда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+arctgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+x}{x}=3$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\lim\limits_{x\to 0}(\pi+2x)\neq 0\right|=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left|\lim\limits_{x\to 0}2x=0\right|=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=-2$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{7x}{3x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}$.

3. Функцияның шектерін 1 тамаша шекті қолданып, табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x-2)\ln\frac{x+1}{x-2}\right]$

Шешуі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

$\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{y}$ белгілеуін енгізсек, $x=y+1/2$ және $x\to\infty$ жағдайда $y\to\infty$.

Сондықтан, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y+5/2}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{3}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{5/2}\right)=e^{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x-2)\ln\frac{x+1}{x-2}\right]=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x-2}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x-2}=\left(1^{\infty}\right)=$

$=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{x+1}{x-2}-1\right]^{x-2}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x-2}=\left|\text{ т.к. }\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x-2}=0\right|=$

$=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{3}{x-2}\right]^{\frac{x-2}{3}}\right\}^{\frac{3}{x-2}\cdot(x-2)}=\ln e^{3}=3$.

4. Үзіліссіздікке зерттеу есептері:

а) $y=x^{2}$ функциясын кез келген $x_0\in(-\infty;\infty)$ нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелде.

Дәлелдеуі:

$f\left(x_0\right)=x_0^2 \Rightarrow f\left(x_0+\Delta x\right)= f\left(x_0+x\right)^2 \Rightarrow \Delta y=\left(x_0+\Delta x\right)^2-x_0^2=\Delta x\cdot\left(2x_0+\Delta x\right)$. Бұдан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)=0$.

б) $y=\sin 5x$ функциясын кез келген $x\in R$ нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелде.

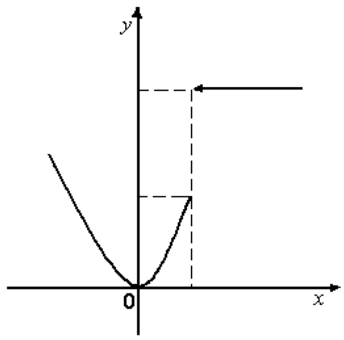
Дәлелдеуі: Кез келген тәуелсіз айнымалының Δx өсімшесі үшін функция өсімшесі $\Delta y=\sin 5x\left(x+\Delta x\right)-\sin 5x=\cos\left(5x+\frac{5}{2}\Delta x\right)\cdot\sin\frac{5}{2}\Delta x$.

Онда кез келген $x\in R$ үшін $\cos 5x$ шектелген функция болғандықтан: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(5x+\frac{5}{2}\Delta x\right)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{5}{2}\Delta x=0$. Ендеше, $y=\sin 5x$ функциясы барлық сан осінде үзіліссіз.

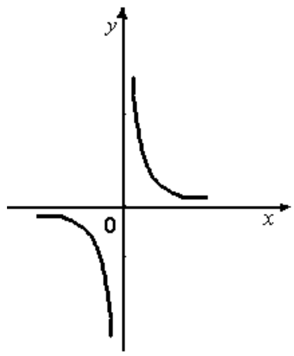
в) үзіліссіздікке зерттеу: $y=\begin{cases}x^2, & \textit{егер } x\le 1\\ 2, & \textit{егер } x>1\end{cases}$

$y\left(1-0\right)=\lim\limits_{x\to 1-0}y=\lim\limits_{x\to 1-0}x^2=1,\quad y\left(1+0\right)=\lim\limits_{x\to 1+0}y=\lim\limits_{x\to 1+0}2=2$.

$x_0=1$ нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі, себебі $y\left(1-0\right)\ne y\left(1+0\right)$.



г) үзіліссіздікке зерттеу: $y=\frac{1}{x},\quad x_0=0$.



$\lim\limits_{x\to -0}y=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to +0}y=\infty$.

$x_0=0$ екінші түрдегі үзіліс нүктесі.

5. Тамаша шектерді есепте:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 3\left(x-2\right)}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+7x\right)}{\sin 7x}$

г) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin 3\left(x+1\right)}{x^2-4x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{tg\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-4}$.

6. $y = 7x^8/(x^4+1)$ шексіз кіші функциясының x шексіз кішіге қатысты, $x \to 0$ ұмтылғандағы, ретін анықта.

7 $f(x) = \begin{cases} (x^2-9)/(x-3), & егер\ x \neq 3 \\ A, & егер\ x = 3 \end{cases}$ функциясы берілген. А-ның қандай мәнінде $f(x)$ функциясы х=3 нүктесінде үзіліссіз? Функцияның графигін сал.

8. $y = (3x+3)/(2x+4)$ функциясының үзіліссіз болатын облысын және үзіліс нүктелерін тап.

9 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & егер\ x < 0 \\ sin\,x, & егер\ 0 \leq x < \pi/2 \\ x - \pi/2 + 1, & егер\ x \geq \pi/2 \end{cases}$ функциясы берілген. Функцияның үзіліс нүктелерін тап және графигін сал.

10. $y = 3^{1/(x+1)} + 1$ функциясын $x_1 = 1$ және $x_2 = -1$ нүктелерінде үзіліссіздікке зертте.

11. $f(x) = (2x+4)/(3x+9)$ функциясын $x_1 = -1$ және $x_2 = -3$ нүктелерінде үзіліссіздікке зерттеп, графигін сал.

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & егер\ x < 0 \\ cos\,x, & егер\ 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 - x, & егер\ x \geq \pi/2 \end{cases}$ функциясы берілген. Үзіліссіздікке зертте және графигін сал.

13. $f(x) = (3x-2)/(x+2)$ функциясын $x_1 = 0$ және $x_2 = -2$ нүктелерінде үзіліссіздікке зертте. Графигін тұрғыз.